https://www.cm-physmath.net/

revisione
09 dicembre 2024

Un approccio minimo ai concetti di

Materia e anti-Materia

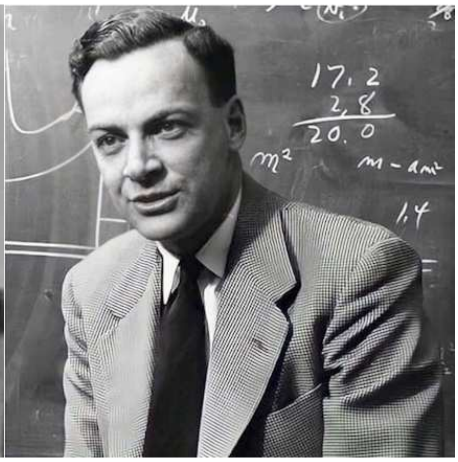
con un'appendice sul Tensore Elettromagnetico

[livello intermedio]

claudio magno

CM Portable PHYS Notebook Series™

Richard Phillips Feynman (1918-1988)



Johann Melchior Ernst Karl
Gerlach Stückelberg (1905-1984)

INDICE

Introduzione

Questo notebook brevissimo ha più il carattere di un'*overview* estemporanea, un *excursus* semi-storico 'alla buona' su un tema fondamentale – quello del riconoscimento dell'esistenza dell'anti-Materia – che sta gettando un'ombra lunghissima fin dentro le problematiche astrofisiche correnti, i.e., in ultima analisi, della Cosmologia Gravitazionale e della nostra rappresentazione *quanto-relativistica* consolidata dell'Universo Fisico osservabile e misurabile.

I responsabili 'visionari' di questo fondamentale passo concettuale in avanti, ricco di ramificazioni e implicazioni di portata imprevedibile, sono stati J. E. Stückelberg – geniale (e sfortunato) fisico teorico e matematico dell'E. T. H. (Eidgenössische Technische Hochschule) di Zurigo – e il grandissimo R. P. Feynman, del Caltech, CA. Nonostante i due avessero lavorato in modo indipendente sul problema, Feynman riconobbe, poi, pubblicamente a Stückelberg, con l'onestà intellettuale che lo contraddistinse per tutta la vita, la priorità *temporale* di intuito riguardo alla 'strada giusta' da imboccare e, quindi, la legittimità *doverosa* di condivisione del Premio Nobel 1965 con Stückelberg. Purtroppo, la miopia ottusa del comitato organizzatore del Premio (unita a pressioni inevitabili (e scontate) ma estranee alla Scienza) trovò un paravento assai conveniente dietro alla figura ormai quasi leggendaria di Feynman.

Si chiama *vita collettiva*, affascinante e miserabile al tempo stesso, ingombrata da servi sciocchi e 'narcisi' smaniosi ma avara per quanto riguarda personalità di vero spessore complessivo. E, anche nella Fisica, non è stata l'unica volta né, con ogni probabilità, sarà l'ultima ...

C M

Materia e anti-Materia

Il concetto di anti-Materia si è sviluppato autonomamente e in modo naturale nel momento in cui si è riusciti a unificare la Meccanica Quantistica e la Relatività Ristretta, alla fine degli anni ’20. Le verifiche sperimentali arrivarono fin dai primi anni ’30.
Oggi, in diagnostica medica, viene prodotta anti-Materia nella tomografia PET (POSITRON EMISSION TOMOGRAPHY), dove sono utilizzati *anti-elettroni*, più comunemente noti come *positroni*).
È particolarmente istruttivo seguire il percorso concettuale che, dalla Relatività Speciale Einsteiniana, ha portato a ipotizzare l’esistenza dell’anti-Materia su scala cosmico-gravitazionale, ripercorrendo i passaggi logici fondamentali su cui poggia il concetto di *anti-particella*, da cui emerge la combinazione tra Fisica Quantistica e Relatività Generale.

- **L’Energia di una particella libera**

In Meccanica Quantistica ordinaria, l’Energia di una *particella libera* avente *quantità-di-moto* (o *momento lineare*) p e Massa m si ricava introducendo la soluzione *di onda piana* (tale espressione quantistica caratterizza una particella ‘*non-soggetta a forze esterne*’) nell’*Equazione di Schrödinger* (3-dim). Il risultato, in regime *non-relativistico*, è

$$E = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}}{2m} \equiv \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 . \tag{1}$$

Invece, la Relatività di Einstein *impone* che tale espressione matematica per l’Energia sia solo la versione *approssimata* della più *fondamentale* seguente:

$$E = (\boldsymbol{p}^2 c^2 + (mc^2)^2)^{1/2}, \tag{2}$$

dove, c è la velocità del segnale EM nel Vuoto e $m = \gamma m_0$, con m_0 la *Massa-a-riposo* corrispondente.
Ora, si consideri l’approssimazione di quantità-di-moto p ‘*molto piccole*’ nel regime di *equivalenza* Energia-Massa, $E = mc^2$. Dalla Massa m di una particella *in moto relativistico*, espressa mediante *espansione binomiale*,

$$m \equiv m_0\gamma = m_0(1 - v^2/c^2)^{-1/2} = m_0\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16}\frac{v^6}{c^6} + \ldots\right), \tag{3}$$

si determina l’espressione dell’Energia Totale di una particella libera, Energia ridotta alla sola parte *cinetica* K,

$$\begin{aligned} E \equiv K &= m_0(\gamma - 1)c^2 = (m_0\gamma - m_0)c^2 \\ &= \left(m_0\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \cancel{\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16}\frac{v^6}{c^6}} + \ldots\right) - m_0\right)c^2 \equiv m_0\left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \cancel{\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16}\frac{v^6}{c^6}} + \ldots\right)c^2 \approx \frac{1}{2}m_0 v^2, \end{aligned} \tag{4}$$

i.e., il risultato *classico*, residuale dalla *cancellazione approssimante*, formalmente giustificata quando $v \ll c$.
La Fisica funziona così: quella che oggi sembra la forma definitiva di un’equazione, classica o quantistica, si ridurrà all’approssimazione di una versione più completa che *potrebbe* essere scoperta in futuro. Lo schema è sempre lo stesso: un’equazione del moto non-relativistica è, sostanzialmente, la versione approssimata della sua *estensione relativistica*, che, a tutt’oggi, è assunta come *la più fondamentale possibile* poiché rispetta il *Principio di Relatività* Einsteiniana.
Il problema nasce, qui, dal tentativo di rendere *relativistica* l’Equazione di Schrödinger. Infatti, il Principio di Relatività *ne cambia significativamente la struttura matematica*. Il calcolo dell’Energia Totale di una particella sia *libera* che *relativistica* con l’Equazione di Schrödinger portò all’esistenza di una *coppia* di soluzioni *relativistiche* formalmente corrette ma *ambigue* riguardo alla loro *interpretazione fisica*:

$$E = \pm(\boldsymbol{p}^2 c^2 + (mc^2)^2)^{1/2} . \tag{5}$$

Qui sta il problema: la struttura matematica della *rappresentazione relativistica* dell’Equazione di Schrödinger (1) ci pone davanti a un bivio: essa non dà, semplicemente, E, secondo l’Eq. (2), ma anche l’espressione opposta $-E$!
Per la prima volta in Fisica, l’equazione del moto di una particella libera ci impone che l’Energia possa avere un valore *sia* negativo *che* positivo. Dunque, perché non viene rigettata $-E$, se si ritiene *assurda* l’esistenza di particelle libere dotate di Energia (Totale) *negativa* nell’Universo Fisico della nostra esperienza *reale*?

Invece, stavolta scegliamo di spingere la matematica relativistica alle sue conseguenze estreme (uno di quei ‘salti nel buio’ che, talvolta, portano a progressi rivoluzionari in Fisica) e ipotizziamo l’esistenza una particella *libera* dotata di Energia Totale *negativa*. Quali ne risulterebbero le proprietà dinamiche?

L’Energia in Meccanica Quantistica descrive l’*evoluzione temporale* della dinamica di una particella *libera*. Il parametro di evoluzione temporale è un fattore dato, nella cosiddetta '*rappresentazione di Schrödinger*', da

$$e^{iEt} \equiv e^{i(\boldsymbol{p}^2/(2m))t}\,, \tag{6.1}$$

una forma esponenziale di un certo numero complesso *unitario*, nel quale, l'esponente è espresso dal prodotto tra l'unità immaginaria, i, e, *più importante*, tra il valore dell'Energia, E, e quello della coordinata temporale, t. Se l'Energia di una particella libera è *negativa*, questo prodotto va modificato così da *conservare il carattere formale* (i.e., *matematico*) *intrinseco alla rappresentazione*. Quindi, se $E < 0$, il parametro esponenziale va riscritto come

$$e^{-iEt} \equiv e^{-i(\boldsymbol{p}^2/(2m))t}\,. \tag{6.2}$$

Ora, è il caso di ricordare che, dalla non-accettabilità che una particella (libera) possa avere Energia Totale negativa, seguirebbero non pochi problemi circa la stabilità stessa della Materia. Infatti, l'Energia priva di un suo *limite inferiore* genererebbe un regime *catastrofico*: la Natura, *spontaneamente* e *senza eccezioni*, tenderebbe a evolvere in micro-stati collettivi *definitivamente stazionari* (in media), di *minore Energia possibile* (*condensazione*).

Ma, allora, c'è un modo alternativo di interpretazione del prodotto $-iEt$, continuando a seguire ciò che la Relatività prescrive riguardo alla struttura spazio-temporale della Realtà Fisica?

- **La questione dell'interpretazione dello *SpazioTempo* Einsteiniano**

Rappresentiamo due *punti-evento*, $(t_1;\boldsymbol{r}_1)$ e $(t_2;\boldsymbol{r}_2)$, con due quaterne *distinte* di coordinate dello *SpazioTempo*, evidenziando la coordinata temporale, t, dalla terna di posizioni spaziali, $\boldsymbol{r} \equiv (x;y;z)$ associata:

$$\text{evento 1:}\quad (t_1;\boldsymbol{r}_1) \equiv (t_1;x_1;y_1;z_1), \tag{7.1}$$

$$\text{evento 2:}\quad (t_2;\boldsymbol{r}_2) \equiv (t_2;x_2;y_2;z_2), \tag{7.2}$$

Ipotizziamo che, *per noi*, l'evento 1 sia avvenuto *prima* dell'evento 2. Allora, matematicamente, si scrive

$$t_2 - t_1 > 0 \tag{7.3}$$

Un altro osservatore, in moto con velocità *relativa* $v\hat{\boldsymbol{x}}$ costante (i.e., di verso $\hat{\boldsymbol{x}}$ e di componente scalare $v \gtrless 0$ *invarianti nel Tempo*) vs. il *nostro* sistema di coordinate, osserva gli *stessi* eventi registrandoli con le *sue proprie* coordinate, contraddistinte da *apici*,

$$\text{evento 1:}\quad (t'_1;\boldsymbol{r}'_1) \equiv (t'_1;x'_1;y'_1;z'_1), \tag{8.1}$$

$$\text{evento 2:}\quad (t'_2;\boldsymbol{r}'_2) \equiv (t'_2;x'_2;y'_2;z'_2), \tag{8.2}$$

Tali eventi corrispondono alle trasformazioni Lorentz-relativistiche *temporali* lungo l'asse *spaziale* X' $(\| X)$,

$$t'_1 = \gamma\left(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1\right), \tag{9.1}$$

$$t'_2 = \gamma\left(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2\right). \tag{9.2}$$

Nelle Eq.i (9.1) e (9.2), $\gamma > 0$ è il *fattore di scala* già incontrato nell'Eq. (3), dipendente dal valore *istantaneo* osservato per v in $v\hat{\boldsymbol{x}}$. Si ricordi che la definizione di γ è:

$$\gamma := (1 - v^2/c^2)^{-1/2}. \tag{9.3}$$

Sottraendo membro-a-membro l'Eq (9.1) dall'Eq. (9.2), si ottiene la differenza tra gli *istanti* dei due eventi rilevati dall'osservatore in moto vs. il nostro sistema di coordinate:

$$t'_2 - t'_1 = \gamma\left(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2\right) - \gamma\left(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1\right) = \gamma\left(t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)\right). \tag{10}$$

A questo punto, la matematica della Relatività costringe a porsi la domanda: che cosa accadrebbe se l'*osservatore in moto relativistico* registrasse che $t'_2 - t'_1 < 0$? o, detto altrimenti con l'Eq. (10), se *noi* osservassimo che

$$t_2 - t_1 < \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)\,, \tag{11.1}$$

i.e. (dando per scontato che, *per noi*, la *freccia del Tempo* punta verso il Futuro $(\Rightarrow\ t_2 > t_1)$), se osservassimo che

$$c^2 \frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1} < v\ ? \tag{11.2}$$

La condizione imposta dalla Teoria della Relatività, fissa, *in ogni caso*, che sia $|v| \le c$. Dunque, da

$$c^2 \frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1} < |v| < c\,, \tag{11.3}$$

segue che

$$c(t_2 - t_1) < x_2 - x_1\,. \tag{11.4}$$

Il vincolo (11.4) dice che, nel *nostro* sistema di riferimento, la distanza spaziale $x_2 - x_1$ tra i due eventi *può* essere maggiore della distanza percorsa dalla radiazione EM nel Vuoto (i.e., fotoni di velocità c) nel tempo che intercorre tra i due eventi stessi e che, se gli eventi soddisfano questa particolare caratteristica, allora è possibile trovare un osservatore con una velocità v tale che $t'_2 < t'_1$, i.e., tale, *per l'osservatore in moto*, da *scambiare l'ordine di accadimento temporale degli eventi*! Questa *assurdità* (!) ammetterebbe la possibilità di esistenza dell'uovo prima di quella della gallina che lo depone, *contraddicendo il Principio di Causalità*.
Ma non c'è alcun problema! Infatti, *l'inversione temporale avviene solo per eventi che non possono essere connessi da alcuna relazione causale*: *non ci può essere trasporto di informazione tra eventi distanti*, *nello Spazio*, *più di quanto la luce percorra nell'intervallo di Tempo che li separa*, com'è implicito nella condizione (11.4).
Nella struttura matematica della Teoria della Relatività *Generale* (quindi, *anche* di quella *Ristretta*), è *possibile* che l'ordine temporale degli eventi appaia invertito *dal punto di vista di un osservatore in moto*.

Quindi? Cosa c'entrano nella Fisica gli eventi *privi di connessione causale*? L'intero impianto della Fisica non è forse basato sulla Causalità, pena questa insormontabile contraddizione … meta-Fisica?

Qui interviene uno dei *principî fondanti* della Teoria Quantistica, sia *non-relativistica* che *relativistica*: il *Principio di Indeterminazione* di Heisenberg (K. W., 1901-1976). Una conseguenza di tale Principio è la *possibilità* che una particella si propaghi da un punto all'altro dello Spazio *anche quando questi due punti* non *sono correlati causalmente*. Se una particella viene emessa in un punto A ed assorbita in un punto B (e, per ipotesi, A e B *non sono* causalmente correlati), allora, un osservatore che si muove con una certa velocità v, Eq. (11.2), vedrebbe l'assorbimento della particella in B a un istante che *precede* quello di emissione in A. Come si esce da questa contraddizione?

- **L'interpretazione di Stückelberg-Feynman**

Tornando al prodotto tra i valori dell'Energia e del Tempo riguardanti l'evoluzione *temporale* di una particella libera, si era concluso che, se l'Energia è negativa, Eq. (6.2), segue l'implicazione *formale equivalente*

$$Et \Rightarrow (-E)t \equiv -Et \equiv E(-t)\,. \tag{12}$$

In altre parole, può essere cambiato il segno di t invece che quello di E: formalmente, nulla appare diverso, ma il risultato *interpretativo* è davvero **dirompente**:

Una particella libera di Energia *negativa* può essere pensata anche come una particella libera di Energia *positiva* che si muove *con la freccia del Tempo che punta verso il Passato*.

Questo fu il punto di partenza di Stückelberg e di Feynman, i quali, si posero subito il problema di come cancellare definitivamente il concetto di *Energia negativa*. D'altra parte, nel contesto delle interazioni tra particelle libere (quasi-) puntiformi, la Teoria della Relatività *non esclude l'inversione temporale*, come si è discusso sopra.
Ma che senso ha questa propagazione indietro nel Tempo? stiamo scivolando ancora nella meta-Fisica? Infatti, si deve ragionare sul significato – dal punto di vista *fisico* – dell'*inversione temporale*.

- **L'interpretazione dell'inversione temporale**

Generalmente classifichiamo le particelle in base al *modo in cui esse si comportano nelle interazioni fondamentali*. In particolare, ci interessa studiarne la traiettoria in una regione in cui è presente un Campo Elettromagnetico, EM.
L'*accoppiamento* tra una particella e un Campo EM avviene mediante una grandezza specifica, la *Carica Elettrica*, q.
E, poiché le grandezze fisiche, di per sé, *non dipendono dalla loro rappresentazione matematica*, *sia essa quantistica e\o relativistica*, allora, è lecito riscrivere l'Equazione di Schrödinger (1) per la particella libera usando entrambe le rappresentazioni, con il Tempo assunto nella forma di *Tempo proprio* (*proper Time*), $t \Rightarrow \tau := t/\gamma$, un tecnicismo

relativistico – va ribadito – *ininfluente* sulle grandezze fisiche! Dunque, all'Eq. *quantistica* del moto (1) corrisponde la forma 4-tensoriale *relativistica*, e.g., quella *covariante*, della *forza di accoppiamento* (*elettromagnetico*) *interattivo*,

$$m\frac{d^2\mathbf{x}^{\mu}}{d\tau^2} = q\frac{d\mathbf{x}^{\nu}}{d\tau}\Xi_{\mu\nu}. \tag{13}$$

La forza elettromagnetica su una carica q modifica la traiettoria del suo *portatore massivo*, *accelerandolo*. Questo descrive traiettorie in una direzione e verso, in base al *segno* della carica q, che può essere *positivo* o *negativo*.
Tra tutti i simboli dell'equazione (13), concentriamoci solo sulla coordinata temporale (relativistica) τ. Ci sono solo due termini che contengono τ esplicitamente, ed entrambi sono denominatori, $d\tau^2$ e $d\tau$ (si ricordi, dall'Analisi, il simbolo sintetico $d\tau^2 \equiv (d\tau)(d\tau)$). Se avviene l'inversione temporale $d\tau \Rightarrow -d\tau$, il denominatore *a sinistra*, un quadrato, *non cambia*; cambia, invece, il denominatore *a destra*, quello contenente il *tensore elettromagnetico* $\Xi_{\mu\nu}$:

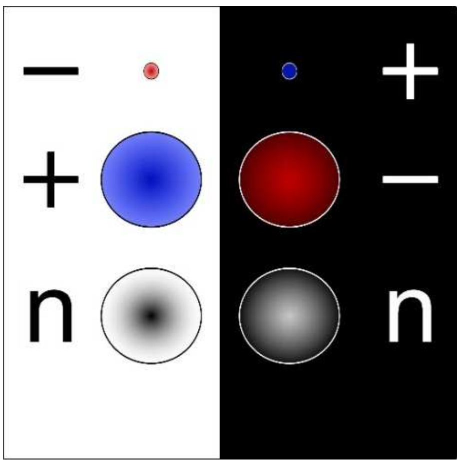
$$m\frac{d^2\mathbf{x}^{\mu}}{(-d\tau)(-d\tau)} \equiv m\frac{d^2\mathbf{x}^{\mu}}{d\tau^2} = q\frac{d\mathbf{x}^{\nu}}{(-d\tau)}\Xi_{\mu\nu} \equiv (-q)\frac{dx^{\nu}}{d\tau}\Xi_{\mu\nu}. \tag{14}$$

Dunque, la freccia del Tempo continua a puntare verso il Futuro, mentre l'Eq. (14), ancora con $m = \gamma m_0$, è riferibile alla particella *equi-massiva* (dove, però, $\gamma \equiv \gamma(v(\tau))$ di carica elettrica *opposta*, l'*anti-particella* associata.

In sintesi, una particella di Energia *positiva* che appaia muoversi *indietro* nel Tempo è, *in realtà*, una particella di Energia *positiva*, con la *stessa* massa ma con *carica opposta*, che si muove *avanti* nel Tempo, i.e., verso il Futuro. Ne segue che, le particelle di Energia *negativa* sono interpretabili come particelle ad Energia *positiva* che si muovono *avanti* nel Tempo, anch'esse verso il Futuro, ma dotate di carica *opposta*. Detto altrimenti, una particella di Energia *negativa* è, semplicemente, un'*anti-particella* di Energia *positiva* che si muove, come ogni particella, *avanti* nel Tempo. differendo dalla *particella associata* solo per il segno della carica elettrica (e di altri *numeri quantici* ad essa connessi).

La scoperta *sperimentale* (1933) del *positrone* (Anderson, (C. D., 1905-1991)) aveva già posto le basi *sia* del quadro interpretativo teorico sia dell'ipotesi *più generale* dell'*esistenza dell'anti-Materia* (P. A. M. Dirac, 1931).
A completamento dell'intuizione del sempre *grandissimo* Feynman, è stato risolto anche il paradosso enunciato sopra:

si supponga di vedere una particella *emessa* in un punto A e *assorbita* in un punto B. Come dice la Relatività, un altro osservatore potrebbe, invece, vedere una particella *assorbita* in B in un istante che precede la sua *emissione* nel punto A (purché A e B *non siano correlati causalmente*). Ora, è evidente che ciò equivale a osservare una particella di carica *opposta* che viene *emessa* in B e *assorbita* in A.
Il Principio di Causalità – *intrinseco al Tempo*! – continua a valere nella Fisica che abbiamo scoperto e costruito nei millenni, cominciando dalle pratiche più semplici nella vita quotidiana. L'Universo Fisico che osserviamo, misuriamo e testiamo *sperimentalmente* miliardi di miliardi di miliardi di volte in ogni istante (più o meno direttamente e in modo incrociato), dalla pioggia che cade al funzionamento di un frullatore o di un microchip al collasso gravitazionale di una stella di neutroni, etc.), conferma ripetutamente, alla nostra *Conoscenza* e alle nostre azioni *conseguenti*, tutte fondate sull'*esperienza*, di essere una *struttura radiativo-materiale quanto-relativistica*. Per ora, ogni altra ipotesi resta a livello di congettura, magari rispettabile e suggestiva, ma in attesa di una falsificazione *sperimentale* definitiva e *inesorabile*.
Altrimenti, si tratta solo di sciocchezze pseudo-poetiche e\o di cortigiani\santoni e pifferai da salotto.



Appendice

La rappresentazione covariante del Tensore EM (Elettromagnetico o di Maxwell)

A chi scrive, non pare inutile né banale sottolineare che la rappresentazione di modelli teorici *lineari* – purché consistenti con il controllo continuo e inesorabile di falsificazione sperimentale! – trovi 'economico' utilizzare metodi e strumenti matematici *lineari*. Ogni effetto fisico non-lineare viene, allora, declassato come *perturbativo* e approssimato mediante espansioni in serie arrestate al termine di *ordine superiore* sufficiente per una stima quantitativa coerente con il dato numerico fornito dall'apparato sperimentale.
Gli strumenti rappresentativi sono le *matrici*, i.e., sia i vettori elementari a n- componenti che, più in generale, loro raggruppamenti, con gli elementi *ordinati* disposti in tabelle $m \times n$, righe$\times$colonne, con $\{m, n\} \in \mathbb{Z}^+ \backslash \{1\}$.
Anche nella Fisica Classica (Elettrodinamica, Elasticità, Fluidodinamica, etc.), le matrici $m \times n$ sono in grado di sintetizzare in modo adeguato comportamenti ed effetti *lineari interattivi coesistenti*, spesso, di natura molto complicata.

La bibliografia per un apprendimento efficace delle manipolazioni algebrico-analitiche *tensoriali* delle matrici è riportata a p. 6. Qui di seguito, è presentata la rappresentazione *relativistica covariante* del Tensore EM, Ξ_{mn}, in forma matriciale *anti-simmetrica* (*skew-symmetric*) esplicita 4×4 in $\mathbb{C}$, (i.e., $a_{mn} = -a_{nm}$, $\forall \{m, n\} \in \{1, 2, 3, 4\}$), nel SI di unità di misura:

$$\boldsymbol{\Xi}_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -i\mathcal{E}_x/c \\ -B_z & 0 & B_x & -i\mathcal{E}_y/c \\ B_y & -B_x & 0 & -i\mathcal{E}_z/c \\ i\mathcal{E}_x/c & i\mathcal{E}_y/c & i\mathcal{E}_z/c & 0 \end{pmatrix},$$

una volta definito $\boldsymbol{B}$ mediante il *potenziale-vettore* 3-dim $\boldsymbol{A}$, (i.e., $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$) e le Trasformazioni di Lorentz delle Equazioni di Maxwell (J. C., 1831-1879). Tali trasformazioni – *lineari*! – sono ottenute definendo il *nuovo* potenziale-vettore 3-dim,

$$\boldsymbol{A}^\dagger := \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi \equiv (A_x + \partial\chi/\partial x)\,\hat{\boldsymbol{x}} + (A_y + \partial\chi/\partial y)\,\hat{\boldsymbol{y}} + (A_z + \partial\chi/\partial z)\,\hat{\boldsymbol{z}} \equiv A_x^\dagger\,\hat{\boldsymbol{x}} + A_y^\dagger\,\hat{\boldsymbol{y}} + A_z^\dagger\,\hat{\boldsymbol{z}}\,,$$

attraverso una *funzione di trasformazione* (*di* '*gauge*') $\chi \equiv \chi(\boldsymbol{r}, t)$ *appropriata*, la cui derivata temporale, $\partial\chi/\partial t$, fornisca la definizione della funzione potenziale *scalare* trasformata $\phi^\dagger := \phi - \partial\chi/\partial t$. Anche ϕ, per garantire l'*invarianza formale* della trasformazione, deve soddisfare, come ϕ, l'Equazione di Laplace, $\nabla^2\phi^\dagger = 0$. In altri termini, la *differenza* $\phi^\dagger - \phi \equiv$ *invariante spaziale* arbitraria e, quindi, χ è una funzione *costante*, i.e., dipendente dalla *sola posizione* $\boldsymbol{r}$ (nello spazio 3-dim).
Ora, appare logico chiedersi il motivo dell'introduzione della matrice 4×4 rappresentativa di Ξ_{mn}. Nel suo '*A Treatise on Electricity and Magnetism*', Maxwell, completando la formulazione della *Legge di Ampère* con la celebre '*corrente di spostamento*',

$$I_d := \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,dr^2 \equiv -\varepsilon_0\mu_0 \int_S \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}^\dagger}{\partial t^2} + \boldsymbol{\nabla}\frac{\partial}{\partial t}\phi^\dagger\right) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,dr^2.$$

generata dal *flusso* $\boldsymbol{J}_d(\boldsymbol{r})$ di *cariche libere* nel *campo elettrico* $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{r})$ attraverso la superficie *gaussiano-vettoriale* $d\boldsymbol{S} \equiv \hat{\boldsymbol{n}}\,dr^2$,

$$\boldsymbol{J}_d := \sigma\boldsymbol{\mathcal{E}} = \mu_0^{-1}\,\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})$$

(rappresentabile evidenziando o la *conduttività elettrica* σ del mezzo o la *permeabilità* μ_0 del Vuoto), aveva intuito chiaramente che la coordinata temporale t era essenziale nella rappresentazione unitaria dei fenomeni elettromagnetici mantenendo, però, i campi $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ e $\boldsymbol{B}$ separati e, sostanzialmente, *indipendenti tra loro*. Maxwell non poteva accorgersi che il suo quadro teorico era già *quantizzato* e *unificabile* attraverso Ξ_{mn}: Relatività e Fisica Quantistica erano ancora di là da venire!

Pertanto, oggidì possiamo generalizzare, nel '*gauge*' di Lorentz, con $c := (\varepsilon_0, \mu_0)^{-1/2}$, relazioni valide per *qualsiasi* mezzo, purché *omogeneo*, *isotropo*, *lineare* e *continuo*, quali, e.g.,

$$\begin{cases} \boldsymbol{A} \equiv (A_x, A_y, A_z, i\phi/c) \Rightarrow (A_x^\dagger, A_y^\dagger, A_z^\dagger, i\phi^\dagger/c) \equiv \boldsymbol{A}^\dagger \\ \nabla^2\phi = 0 \Rightarrow \Box^2\phi^\dagger \equiv \Box \cdot \Box\,\phi^\dagger = 0 \\ \boldsymbol{B}^\dagger = \Box \times \boldsymbol{A}^\dagger \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z, \partial/\partial t) \times \boldsymbol{A}^\dagger \equiv \Box \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \\ \Box^2\boldsymbol{A}^\dagger + \mu\boldsymbol{J}_d^\dagger = \boldsymbol{0} \equiv (0, 0, 0, 0) \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{cases}.$$

Sarebbe auspicabile (secondo chi scrive) che, visti i rapidi avanzamenti e consolidamenti in atto nella Fisica Moderna, le Equazioni di Maxwell venissero insegnate deducendole – *definitivamente* – da Ξ_{mn} e adattandole, poi, ai casi specifici nelle forme *ridotte* opportune. La chiamo: consapevolezza sia *formativa* sia *culturale* verso il Futuro.

Bibliografia

Il numero d'ordine *evidenziato* di un testo, e.g., [7], ne indica la versione PDF *contenuta* in un 7z-Archivio e scaricabile gratuitamente dalla pagina Biblioteca di questo web-site: https://www.cm-physmath.net/libr_page.html .

Ben lontano dal ritenere questo elenco bibliografico esaustivo o fondamentale, lo propongo – a chi legge per iniziare a *praticare consapevolmente* – come un riferimento regolare possibile agli spazi *lineari* 3.dim e 4-dim e alle loro *rappresentazioni matriciali* rispettive. Ho trovato questi 'tools' *molto* utili. Sono contenuti nelle cartelle interne al 7z-Archivio 13.

[1] Lang, S., *Linear Algebra*, 3rd ed., Springer (2004 corr. prin.);

[2] Lipschutz, S. - Lipson, M. L., *Linear Algebra*, 4th ed. Schaum's Outline Series, McGraw-Hill (2009);

[3] Spiegel, M. R. - Lipschutz, S. - Spellman, D., *Vector Analysis*, 2nd ed., Schaum's Outline Series, McGraw-Hill (2009);

[4] Ayres, F., Jr., *Theory and Problems of MATRICES*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, Inc. (1962);

[5] Bronson, R., *Theory and Problems of MATRIX OPERATIONS*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, Inc. (1989);

[6] Lass, H., *Vector and Tensor Analysis*, McGraw-Hill Book Co. (1950);

[7] Spain, B., *TENSOR CALCULUS - A Concise Course*, 3rd ed., Oliver & Boyd Ltd. (1960; 2003 Dover repr.);

[8] Borisenko, A. I., - Tarapov, I. E., *Vector and Tensor Analysis with Applications*, Prentice-Hall, Inc. (1968);

[9] Sochi, T., *TENSOR CALCULUS*, a 2-PDF folder, arXiv:1603.01660v3 (2016);

[10] Kay, D, C., *Theory and Problems of TENSOR CALCULUS*, Schaum's Outline Series, 2nd ed., McGraw-Hill Book Co. (1988).

■■■